
NEMO, FRESHKISS2D ET LE CAS TEST DU LOCK EXCHANGE

Sibylle Téchené
INRIA/LJLL & LOCEAN

Septembre 2019

Table des matières

1	Introduction	4
2	Présentation du problème	5
2.1	L'univers des mathématiques	5
2.1.1	Les équations de conservation	5
2.1.2	Les conditions aux limites cinématiques	7
2.1.3	Les conditions aux limites dynamiques	7
2.2	L'univers de la physique	8
2.2.1	Benjamin (1968) et Shin (2004)	9
2.2.2	Adduce (2012)	10
2.2.3	Ilicak (2012)	11
3	Les outils numériques	12
3.1	Le logiciel <code>Freshkiss2d</code>	12
3.1.1	Le multi-couches ou discrétisation verticale	13
3.1.2	Les volumes finis ou discrétisation horizontale	14
3.1.3	La discrétisation temporelle	15
3.1.4	Lancer le code	15
3.2	Le logiciel <code>NEMO</code>	15
3.2.1	La formulation généralisée	16
3.2.2	Les différences finies discrétisation spatiale et temporelle	16
3.2.3	La discrétisation temporelle	16
3.2.4	La discrétisation spatiale horizontale	17
3.2.5	La discrétisation spatiale verticale	18
3.2.6	Concrètement : Le code les entrées les sorties	18
3.3	Description de l'expérience numérique	18
3.3.1	Configuration de base	20
3.4	Métriques : analyse des résultats	21
3.4.1	La vitesse du front	21
3.4.2	Le mélange	21
3.4.3	L'énergie	21
4	Étude des résultats de <code>NEMO</code> et <code>Freshkiss2d</code>	22
4.1	Étude de la convergence	22

	3
4.1.1	Freshkiss2d 22
4.1.2	NEMO 23
4.1.3	Bilan 24
4.2	Inter-comparaison : problème modèle 24
4.2.1	Évolution de l'interface 25
4.2.2	Le champ de vitesse 25
4.2.3	Evolution de la position du front et du mélange 26
4.2.4	Evolution de l'énergie cinétique et potentielle 27
4.2.5	Bilan de l'intercomparaison 27
4.3	Sensibilité à la viscosité 28
4.3.1	Effet de la viscosité purement latérale sur les simulations NEMO . . 31
4.3.2	Effet de la viscosité purement verticale (avm0) sur les simulations NEMO 32
4.3.3	Bilan 33
5	Conclusion et perspectives 35

1 Introduction

Le stage à l'INRIA qui clôture cette année de M2 a été pour moi l'occasion de confronter deux univers que sont les mathématiques et l'océanographie. Deux univers car même en résolvant les équations identiques, la communication entre ces deux mondes n'est pas si élémentaire.

Initialement porté sur l'étude de la coordonnée verticale et la comparaison de deux méthodes codées dans deux logiciels différents, le sujet du stage s'est rapidement transformé en une étude des similarités et des différences entre ces logiciels dans le cadre d'une expérience classique : le *lock exchange* .

L'expérience du *lock exchange* met en jeu des phénomènes complexes : la transformation d'énergie potentielle en énergie cinétique, la dissipation de l'énergie totale, et le mélange. Expérimentalement, on a coutume de caractériser cette expérience avec la vitesse du front, c'est-à-dire la vitesse du point le plus bas de la cuve situé à l'interface entre les deux fluides.

La production des simulations avec les deux logiciels, donne lieu à des résultats différents. L'objectif du stage est de comprendre la raison de cette différence des points de vue formel et pratique et de confronter ces résultats aux données expérimentales.

Ce rapport présentera en premier lieu l'aspect théorique du problème du *lock exchange* , en rappelant les équations de Navier Stokes ainsi que les papiers scientifiques idoines. Viendra ensuite la description des deux logiciels *Freshkiss2d* et *NEMO* ainsi que le cadre de l'étude et les outils d'analyse employés. Pour finir, les résultats de la comparaison seront révélés et commentés.

2 Présentation du problème

Le *lock exchange* est un problème classique en mécanique des fluides : il traite de l'évolution de deux fluides juxtaposés, de densités différentes, initialement isolés par une paroi dans une cuve rectangulaire. A l'instant $t = 0$ seconde la paroi est soulevée les deux fluides entrent en mouvement sous l'action de leur différence de densité.

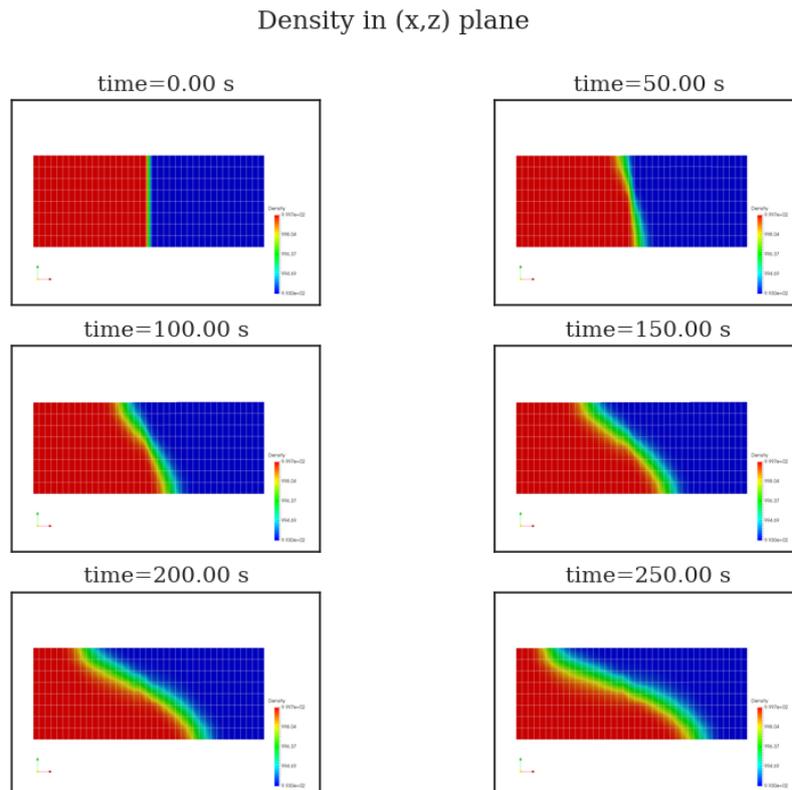


FIGURE 1: Illustration du cas test du *lock exchange* tirée du site de FRESHKISS3D

2.1 L'univers des mathématiques

2.1.1 Les équations de conservation

On s'intéresse aux équations de Navier Stokes pour des fluides en deux dimensions plan (x,z) avec une surface libre et un fond plat. Ces équations traduisent la conservation de la masse et des moments. L'équation d'état qui fait le lien entre masse volumique et traceur, se résume dans cette étude à une équation linéaire et simplifiée. $U(x, z, t) = (u, w)^T$

est la vitesse du fluide à la position (x, z) et à l'instant t , $\rho(x, z, t)$ est la masse volumique du fluide à la position (x, z) et à l'instant t , $p(x, z, t)$ est la pression, g est la constante de gravité, μ est la viscosité du fluide, $T(x, z, t)$ représente le traceur à la position (x, z) et à l'instant t , le traceur est soit une concentration en sel, soit une température, μ_T est la diffusion associée au traceur.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} + \mu \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} + \mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial u T}{\partial x} + \frac{\partial w T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_T \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad (4)$$

$$\rho = \rho(T), \quad (5)$$

En appliquant l'hypothèse couche mince au système on peut négliger les effets des dérivées verticales des composantes de la vitesse. Dans le cadre de l'approximation de Boussinesq la masse volumique est décomposée en une masse volumique moyenne constante et uniforme sur le domaine ρ_0 et une masse volumique locale $\rho'(x, z, t)$: $\rho(x, z, t) = \rho_0 + \rho'(x, z, t)$. Étant donné que $\rho' \ll \rho_0$, on néglige les termes d'ordre supérieur à 1 pour l'équation de conservation du moment horizontale, en revanche, on les conserve pour l'équation de conservation du moment vertical. On prendra $\rho' = \alpha(T - T_0)$ l'équation d'état $\rho(T)$ est simplifiée et linéaire. A la manière de Boittin (2019) [3], en passant à la limite incompressible et en négligeant les variations de ρ' par rapport à ρ on obtient le système suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (6)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g, \quad (8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_T \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad (9)$$

$$\rho = \rho_0 + \alpha(T - T_0), \quad (10)$$

Remarque : le coefficient α dépend de la nature du traceur (on prendra 0.2 pour la

température et 0.75 pour la salinité), on notera que comme le précise Boittin 2019 [3], dans le cadre de l'approximation Boussinesq l'énergie cinétique ρu^2 n'est pas conservée, c'est la quantité $\rho_0 u^2$ qui est conservée. De plus, comme l'équation d'état est linéaire, le volume et la masse sont conservés.

Les conditions aux limites qui assurent l'unicité de la solution sont les conditions cinématiques de surface et de fond qui traduisent la conservation du volume et la non pénétration au fond, et les conditions dynamiques de surface et de fond qui traduisent l'équilibre physique entre le système et les contraintes extérieures.

2.1.2 Les conditions aux limites cinématiques

La condition limite à la surface revient simplement au transport de la surface libre. Par abus de notation on pose $u(\eta) = u(x, \eta, t)$ où $\eta(x, t)$ est la surface libre.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} = w(\eta), \quad (11)$$

La condition limite au fond, en prenant un fond plat et indépendant du temps, revient à considérer une vitesse normale nulle au fond. Par abus de notation on pose $w(z_b) = w(x, z_b, t)$ où $z_b(x, t)$ est le fond.

$$w(z_b) = 0 \quad (12)$$

2.1.3 Les conditions aux limites dynamiques

On considère qu'à la surface la seule contrainte appliquée au fluide est la pression de l'air, cette contrainte vient équilibrer le tenseur de contrainte du fluide sur la direction normale à la surface libre. La normale à la surface libre est $n_s = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\partial \eta}{\partial x}}} \left(-\frac{\partial \eta}{\partial x}, 1 \right)^T$. On obtient donc :

$$2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \times \left(-\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} + \mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) \times 1 = p_s \times \left(-\frac{\partial \eta}{\partial x} \right), \quad (13)$$

$$\left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} + \mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) \times \left(-\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial w}{\partial z} \times 1 = p_s \times 1 \quad (14)$$

On considère une contrainte de glissement libre au fond, cette contrainte vient équilibrer le tenseur de contrainte du fluide sur la direction tangentielle. La normale au fond

est $n_b = (0, 1)^T$ puisque le fond est plat on a $\frac{\partial z_b}{\partial x} = 0$. On obtient donc :

$$\left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} + \mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) \times 1 = \kappa u(z_b) \quad (15)$$

2.2 L'univers de la physique

Lorsqu'on ouvre la paroi de séparation entre les deux fluides, le système est mis en mouvement par le gradient de pression hydrostatique horizontal. A une profondeur z il s'exprime comme :

$$\frac{\partial p}{\partial x}(z) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_z^\eta \rho(x, \zeta, t) g d\zeta \right) \quad (16)$$

Celui-ci est directement lié à la différence de densité et la hauteur d'eau considérée. Plus la différence de densité entre les deux fluides est grande, plus le gradient de pression est important et plus le système est rapide. La pression étant une grandeur intégrée sur la verticale, l'évolution de son gradient horizontal va également varier avec la hauteur d'eau. Le fluide plus dense et plus lourd s'écoule au fond de la cuve dans l'espace qu'il n'occupe pas initialement, formant un courant de gravité. Le fluide plus léger s'écoule en sens inverse, formant un courant de flottabilité.

La grandeur caractéristique qui reflète la prédominance de l'énergie cinétique, représentée par une vitesse caractéristique du système v_c élevée au carré, sur l'énergie potentielle, représentée par le produit entre une gravité caractéristique g_c et une longueur caractéristique l_c , est le nombre de Froude. Son expression résulte de l'adimensionnement des équations évoquées plus haut :

$$F_h = \frac{v_c}{\sqrt{g_c l_c}}$$

Dans le cas d'une expérience de type *lock exchange* de vitesse caractéristique u en m/s de hauteur fixe h en m avec une densité ρ_2 en kg/m³ à gauche et ρ_1 en kg/m³ à droite, l'expression du nombre de Froude dit densimétrique est :

$$F_h = \frac{u}{\sqrt{g \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} h}}$$

On remarquera que si ρ_2 et ρ_1 sont égales le système est à l'équilibre et ne bouge pas.

2.2.1 Benjamin (1968) et Shin (2004)

Le problème du *lock exchange* a fait l'objet d'études depuis des dizaines d'années. Le résultat le plus cité parmi la littérature à laquelle je me suis intéressée, est celui du papier Benjamin de 1968 [2] qui présente une expression pour la vitesse du front. Le papier de Shin (2004) [7] montre sous quelles hypothèses ce résultat est vérifié.

On se place dans une fenêtre glissant à la vitesse du front, dans ce référentiel on peut considérer qu'on observe le front dans un régime permanent, on suppose que l'énergie est conservée : on néglige les termes dissipatifs. On se place en deux dimension (x, z) , on considère également une cavité dans un liquide ce qui signifie que la différence de densité est grande et que les fluides ne sont pas miscibles. La conservation de la quantité de mouvement horizontale s'exprime donc de la manière suivante :

$$\int_0^h (\rho u(x)^2 + p(x, 0) - \rho(z)gz) dz = K_x$$

La vitesse du fluide dense u_{2g} est constante. Par continuité, il est possible d'exprimer la relation entre la vitesse à droite u_{1d} et la vitesse à gauche u_{1g} en tenant compte des hauteurs de fluide, les expressions des pressions à gauche p_g et à droite p_d sont elles aussi fonction des hauteurs d'eau.

Finalement, en posant $\gamma = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ l'article de Shin(2004) [7] montre que

$$F_h^2 = \frac{u^2}{g(1-\gamma)h} = \frac{1}{\gamma} \frac{h(2h-h_2)(h-h_2)}{h^2(h+h_2)}$$

Ensuite, il établit l'expression la variation d'énergie adimensionnée à travers le volume considéré :

$$\Delta E = \frac{h_2^{5/2}(h-2h_2)(2h-h_2)^{1/2}}{2h(h+h_2)^{3/2}(h-h_2)^{1/2}}$$

Lorsque on se place dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, à savoir lorsque $\gamma \approx 1$ et lorsqu'on choisit le rapport $\frac{h_2}{h} = 0.5$, on a bien conservation de l'énergie totale $\Delta E = 0$.

Lorsqu'on remplace $\frac{h_2}{h} = 0.5$ dans l'expression du nombre de Froude, on trouve $F_h = \frac{1}{2}$. D'où l'expression de la vitesse du front de Benjamin(1968) [2], qui ne dépend que du

gradient de pression initial entre les deux fluides. Elle apparaît sous la forme :

$$v_f = \frac{1}{2} \sqrt{g \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} h}$$

Avec v_f la vitesse du front en m/s , $g = 9,81 m/s^2$ la constante de gravité, ρ_2 la masse volumique du fluide dense, ρ_1 la masse volumique du fluide plus léger, et h la hauteur d'eau du système.

Le papier de Shin 2004 affirme que pour des nombres de Reynolds suffisamment grands cette théorie correspond aux observations issues d'expériences physiques.

Remarque : la notion de non conservation de l'énergie en l'absence de termes dissipatifs est un peu obscure pour moi. A $\gamma = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ donné, le nombre de Froude $U/\sqrt{g(1-\gamma)h}$ est maximum $F_h = 0.527$ lorsque le rapport entre la hauteur d'eau du fluide dense h_2 et la hauteur d'eau totale h : $h_2/h = 0.347$.

2.2.2 Adduce (2012)

Adduce 2012 [1] propose 11 expériences dans lesquelles elle met en oeuvre plusieurs configurations de *lock exchange* en faisant varier soit la hauteur d'eau soit la longueur d'eau soit la différence de densité entre les fluides. Elle confronte les résultats de ses expériences à plusieurs modèles numériques à deux couches (toit rigide ou surface libre, avec ou sans entraînement), et montre que les modèles qui correspondent le mieux aux observations sont les modèles en surface libre avec entraînement.

La vitesse du front est mesurée pour chaque expérience. Ces configurations permettent d'observer l'évolution du front, aussi, mettent-elles en oeuvre un tout petit volume d'eau dense qui voyage le long de l'horizontale. Elles ne sont pas pensées pour permettre une conservation de l'énergie. En effet l'eau dense est répartie sur une longueur de moins de 10% de la longueur totale de la cuve, ce qui est insuffisant pour avoir un rapport hauteur d'eau dense sur hauteur d'eau totale de 1/2 pour lequel il y a conservation d'énergie. On peut voir que plus le gradient de pression est faible, plus le front est lent et plus il est sujet au mélange et à la dissipation d'énergie cinétique : le front ralentit. En cherchant à reproduire le comportement du fluide numériquement, l'article de Adduce (2012) [1] montre qu'il est nécessaire d'avoir un modèle à deux couches (au moins), une surface libre et de rajouter de l'entraînement i.e. viscosité pour obtenir une vitesse du front numérique similaire à la vitesse physique observée.

Globalement dans ce papier deux expériences nous intéressent particulièrement :

- l'expérience numéro 9 maximise le gradient de pression : le front est rapide et les effets de dissipation due à la viscosité et à la diffusion sont dominés par le gradient de densité. La vitesse du front est donc dominée par le terme source lié à la différence de densité. Dans ce cas, l'effet du cisaillement peut être négligé.
- l'expérience numéro 10 minimise le gradient de pression : avec une petite différence de densité et une petite hauteur d'eau, le front est plus lent et les termes de cisaillement ont le temps d'impacter le processus ce qui explique l'évolution du front : linéaire dans un premier temps puis la vitesse instantanée décroît et courbe l'évolution du front.

Dans le cas de l'expérience numéro 9, Adduce observe que, malgré un cadre non Boussinesq, le front atteint la vitesse théorique donnée dans le papier de Benjamin 1968 qui est autour de 0.24m/s. Sachant que la valeur de la vitesse théorique du front est a priori conditionnée par la propriété de conservation d'énergie du système, et sachant que l'énergie n'est pas conservée dans l'expérience, on peut questionner la pertinence de l'utilisation d'une telle vitesse pour caractériser la conservation de l'énergie dans le système. La précision des résultats expérimentaux, la méthode de mesure de la vitesse du front, ou encore l'expression même de cette vitesse sont susceptibles de faire défaut.

2.2.3 Ilicak (2012)

L'article Ilicak 2012 [6] traite du mélange dianeutral parasite pour une simulation numérique de *lock exchange* dans un canal de 64 km de long et 20 m de haut. Le mélange dianeutral est le mélange qui a lieu à travers les surfaces neutres. Comme nous considérons une équation d'état linéaire, les surfaces neutres et isopycnales sont confondues. Il montre que ce mélange tend à diminuer avec l'augmentation de la résolution et il diminue aussi avec le nombre de Reynolds dit de grille $Re_\Delta \approx u_f \Delta / \nu_h$ ou u_f est la vitesse du front, Δ la résolution et ν la viscosité cinématique. Autrement dit le mélange diminue lorsque la viscosité augmente. En comparant plusieurs outils de simulation, il confirme que les schémas décentrés (e.g. UP3) d'ordre élevé utilisés pour l'advection des moments génèrent une plus grande viscosité numérique et donc moins de mélange. Il montre également qu'une viscosité latérale de type "shear-dependant Smagorinski" réduit Re_Δ et diminue ainsi le mélange.

Il est intéressant de noter que la viscosité du schéma, qui pourrait être associée à un effet dissipatif, n'affecte pas la vitesse du front.

3 Les outils numériques

Nous nous intéressons à la comparaison de deux logiciels `NEMO` et `Freshkiss2d`. Ces deux logiciels étant largement utilisés par la communauté océan pour `NEMO` et la communauté maths pour `Freshkiss2d`, les schémas qu'ils utilisent ont été validés à l'aide de tests unitaires et de cas tests, les résultats sont comparés soit à des solutions analytiques soit à des expériences physiques. Selon leur documentation et leur code, `NEMO` et `Freshkiss2d` sont basés sur le même système d'équations, à savoir, Navier Stokes hydrostatique, incompressible, Boussinesq, avec surface libre (cf § 2.1.1.). Nous nous intéresserons dans un premier temps à un système sans termes explicites de dissipation. Ci-dessous, on rappelle le système : à gauche sous forme non conservative à droite sous forme conservative :

$$\begin{array}{ll}
 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\
 \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, & \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial u w}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\
 \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g, & \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \\
 \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} = 0 & \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial u T}{\partial x} + \frac{\partial w T}{\partial z}, \\
 \rho = \rho_0 + 0.2(T - T_0) & \rho = \rho_0 + 0.2(T - T_0)
 \end{array}$$

La comparaison des méthodes utilisées par ces deux logiciels n'est pas aisée. En effet, leur documentation a été élaborée pour des lecteurs au fait de l'état de l'art des méthodes implémentées. Il n'est pas évident de passer du formalisme du cours à celui du code scientifique. De plus, `NEMO` est un outil aux applications multiples, ce qui rend sa description complexe pour un novice.

3.1 Le logiciel `Freshkiss2d`

`Freshkiss2d` implémente le modèle présenté précédemment sous sa forme conservative en utilisant une approche volumes finis et une formulation moyennée par couche type Saint Venant sur la verticale. A la différence des formulations s ou σ qui définissent un système de coordonnées par rapport à la géométrie du fond, on n'a pas ce problème de dilatation et de compression des couches en fonction de la hauteur d'eau et, à la différence des formulations isopynales ρ , les couches ne suivent pas des propriétés physiques et les

échanges entre couches sont autorisés.

3.1.1 Le multi-couches ou discrétisation verticale

Au lieu de considérer l'approximation de Saint Venant sur toute la hauteur d'eau $h(x, t)$, on fait l'approximation de Saint Venant localement sur chaque couche $h_\alpha(x, t)$ d'un ensemble de couches $(h_\alpha)_{\alpha \in [0, N]}$ défini de manière arbitraire sur la verticale. En ce sens la description verticale multi-couche n'est ni une description par une coordonnée liée au fond, ni par une coordonnée isopycnale, il ne s'agit pas d'un changement de variable mais d'une approche intégrée.

On considère alors que la hauteur d'eau totale h est composée de N couches de hauteur h_α : $h = \sum_{\alpha=1}^N h_\alpha$.

La coordonnée verticale est donc définie comme il suit :

$$z_{\alpha+1/2}(x, t) = z_b(x) + \sum_{j=1}^{\alpha} h_j(x, t)$$

La vitesse à l'instant t et à la position (x, z_α) où z_α appartient à la couche h_α est représentée par la vitesse moyennée sur la verticale :

$$\begin{aligned} u_\alpha(x, t) &\approx \frac{1}{h_\alpha} \int_{z_{\alpha-1/2}}^{z_{\alpha+1/2}} u(x, z, t) dz, \\ u_\alpha^2(x, t) &\approx \frac{1}{h_\alpha} \int_{z_{\alpha-1/2}}^{z_{\alpha+1/2}} u^2(x, z, t) dz, \\ p_\alpha(x, t) &\approx \frac{1}{h_\alpha} \int_{z_{\alpha-1/2}}^{z_{\alpha+1/2}} p(x, z, t) dz \end{aligned}$$

Lorsqu'on intègre l'équation de conservation de la masse (6) le long de la verticale sur la couche α en utilisant la formule de Leibniz, on fait apparaître les termes d'échanges $G_{\alpha+1/2}$ et $G_{\alpha-1/2}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{z_{\alpha-1/2}}^{z_{\alpha+1/2}} u dz \right) &= \underbrace{\frac{\partial z_{\alpha+1/2}}{\partial t} + u_{\alpha+1/2} \frac{\partial z_{\alpha+1/2}}{\partial x} - w_{\alpha+1/2}}_{G_{\alpha+1/2}} \\ &\quad - \underbrace{\left(\frac{\partial z_{\alpha-1/2}}{\partial t} + u_{\alpha-1/2} \frac{\partial z_{\alpha-1/2}}{\partial x} - w_{\alpha-1/2} \right)}_{G_{\alpha-1/2}} \end{aligned}$$

On intègre également l'équation de conservation des moments (7, 8) le long de la verticale sur la couche α en utilisant les termes d'échanges $G_{\alpha+1/2}$ et $G_{\alpha-1/2}$. On applique l'hypothèse de Saint Venant sur la couche α et on obtient :

$$\frac{\partial h_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial h_\alpha u_\alpha}{\partial x} \quad (17)$$

$$= G_{\alpha+1/2} - G_{\alpha-1/2} \quad (18)$$

$$\frac{\partial h_\alpha u_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial h_\alpha u_\alpha^2}{\partial x} + \frac{\partial h_\alpha p_\alpha}{\partial x} \quad (19)$$

$$= u_{\alpha+1/2} G_{\alpha+1/2} - u_{\alpha-1/2} G_{\alpha-1/2} + \frac{\partial z_{\alpha+1/2}}{\partial x} p_{\alpha+1/2} - \frac{\partial z_{\alpha-1/2}}{\partial x} p_{\alpha-1/2} \quad (20)$$

3.1.2 Les volumes finis ou discrétisation horizontale

La méthode de discrétisation par volumes finis est une méthode conservative basée sur un bilan de flux. Si X est solution, le système présenté ci-dessus peut, en partie, se mettre sous la forme :

$$\partial_t X + \partial_x F(X) = S(X) \quad (21)$$

On approxime la grandeur $X(t, x)$ sur la maille Ω_i par sa moyenne notée $X_i(t)$:

$$X_i(t) = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} X(t, x) dx$$

On intègre (21) en temps sur un pas de temps Δt entre t^n et t^{n+1} et en espace sur Ω_i qui devient en 1D Δx_i avec $S = 0$, et on utilise le théorème de permutation et le théorème de Green-Ostrogradski, en posant $X_i^n = X(t^n, x_i)$, alors

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\Omega_i} \partial_t X + \partial_x F(X) dx dt = 0$$

devient

$$X_i^{n+1} = X_i^n + \frac{1}{\Delta x_i} \left(\underbrace{\int_{t^n}^{t^{n+1}} F(X(t, x_{i+1/2})) dt}_{\Delta t Flux_{i+1/2}^n} - \underbrace{\int_{t^n}^{t^{n+1}} F(X(t, x_{i-1/2})) dt}_{\Delta t Flux_{i-1/2}^n} \right) \quad (22)$$

La manière de définir la quantité $Flux_{i+1/2}^n = F(X_i^n, X_{i+1}^n)$ détermine la "qualité" de la

discrétisation. On notera que la qualité dépend de l'usage. Dans le cas de `Freshkiss2d`, on utilise des schémas cinétiques pour déterminer l'expression des flux numériques des termes hyperboliques du modèle.

3.1.3 La discrétisation temporelle

Pour réaliser la discrétisation temporelle du système, `Freshkiss2d` utilise un `splitting` en temps en séparant la partie hyperbolique et la partie non hyperbolique du système multi-couches. La partie hyperbolique (advection et transfert de masse) est traitée avec un schéma explicite. La partie parabolique (friction et viscosité) est traitée avec un schéma semi explicite pour une question de stabilité.

$$X_i^{n+1/3} = X_i^n + \Delta t F(X_i^n) \quad (23)$$

$$X_i^{n+2/3} = X_i^{n+1/3} + \Delta t S_e(X_i^{n+2/3}) \quad (24)$$

$$X_i^{n+1} = X_i^{n+2/3} + \Delta t S_v(X_i^{n+2/3}) \quad (25)$$

Où F représente la partie hyperbolique du système, S_e la partie échange et S_v la partie parabolique.

3.1.4 Lancer le code

On gère les paramètres avec les fichiers : `data.freshkiss`

Pour se mettre dans une configuration particulière, il est nécessaire de modifier `Tinit.f` et de recompiler.

Compilation sur le centre de calcul de l'INRIA : `./make`

Création de script et lancement : `oarsub launch`

Observation de l'état du run : `oarstat | grep stechene`

3.2 Le logiciel NEMO

NEMO est un logiciel de simulation de l'océan global, il implémente un modèle un peu plus complexe que le modèle présenté ci-dessus car il tient compte de l'accélération de Coriolis et fonctionne généralement dans un cadre où les tailles de maille et les pas de temps sont grands. Pour avoir une bonne représentation de l'océan terrestre, il doit donc reproduire les comportements de l'eau à des échelles sous maille, c'est ce qu'on appelle les paramétrisations. Dans le contexte présent, NEMO fonctionne dans un mode particulier sans ces ingrédients supplémentaires. NEMO implémente le modèle présenté

précédemment en utilisant une approche différence finie. Il peut représenter la verticale à l'aide de plusieurs type de coordonnées mais étant donné que l'expérience menée est à fond plat nous nous plaçons dans le cas classique de la coordonnée z .

3.2.1 La formulation généralisée

Les équations sont implémentées en utilisant une notation généralisée qui permet d'exploiter simplement les multiples possibilités de NEMO . Dans le cadre de cette étude, nous nous plaçons en coordonnée z eulérienne c'est à dire que les couches sont parallèles et rectilignes et d'épaisseur constante.

3.2.2 Les différences finies discrétisation spatiale et temporelle

La méthode de discrétisation par différences finies est une méthode basée sur l'approximation des dérivées d'une fonction $f : x \rightarrow f(x)$ suffisamment régulière dans un voisinage d'un point donné par exemple x_0 . Les formules de Taylor donnent : $f(x_0 + h) = f(x_0) + h \frac{df}{dx}(x_0) + \frac{h^2}{2} \frac{d^2f}{dx^2}(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) + \varepsilon_n$ où ε_n quantifie une erreur négligeable pour h assez petit.

En considérant un maillage de résolution Δx et deux noeuds successifs x_i et x_{i+1} tels que $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ avec Δx assez petit, la dérivée de la vitesse en x_i est donnée par :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{\Delta x} + O(\Delta x) \simeq \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \quad (26)$$

Le système hyperbolique rappelé ci- dessous :

$$\partial_t X + \partial_x F(X) = S(X)$$

peut se mettre sous la forme :

$$X_i^{n+1} = X_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1}^n(X), F_i^n(X))$$

3.2.3 La discrétisation temporelle

Le schéma utilisé dans NEMO pour la discrétisation temporelle des termes non diffusifs (advection du moment et des traceurs, gradient de pression et Coriolis) est le schéma Leap Frog ou saute-mouton qui est un schéma du second ordre.

$$X_i^{n+1} = X_i^{n-1} + 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{(i)}^n(X))$$

L'inconvénient d'un tel schéma est la divergence des pas de temps pairs et impairs. Il est donc couplé avec un filtrage d'Asselin. Le filtre d'Asselin rajoute une diffusion temporelle via un laplacien et mélange les termes des pas de temps pairs et impairs. La figure 2 montre un schéma complet des étapes réalisées par NEMO à chaque pas de temps, pour plus de détail on se référera au *nemo book* [5].

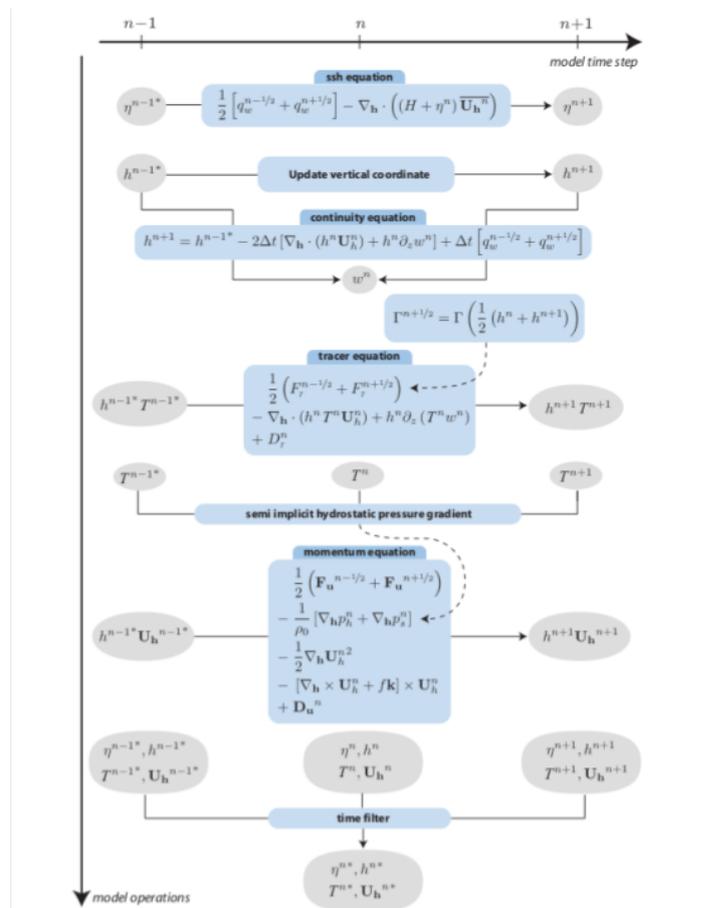


FIGURE 2: Discrétisation temporelle de nemo tirée du *nemo book* [5]

3.2.4 La discrétisation spatiale horizontale

Le maillage sur lequel sont discrétisées les équations est une grille Arakawa-C. C'est une grille décalée (T , u et w ne sont pas localisés au même endroit) qui permet d'avoir une bonne estimation des dérivées sans augmenter le nombre de points à calculer. Plusieurs schémas sont utilisables dans NEMO pour la discrétisation de l'advection, la plupart sont d'ordre 2 au minimum. Pour ce qui est de la discrétisation de la partie diffusion ou viscosité, il existe soit un Laplacien soit un bi-Laplacien. L'intérêt du bi-Laplacien est

que son spectre est plus étroit, il tue [un peu fort comme terme] des échelles plus petites que le Laplacien.

3.2.5 La discrétisation spatiale verticale

Le maillage vertical est organisé selon plusieurs niveaux. Deux principaux types de coordonnées sont implémentées dans NEMO : la coordonnée s qui suit le relief du fond de l’océan et la coordonnée z qui décrit des niveaux horizontaux, les variations du fond sont alors représentées par des marches d’escalier. Plusieurs subtilités et combinaisons de ces coordonnées peuvent être utilisées. Nous ne considérerons que les coordonnées rectilignes puisque nous travaillons à fond plat.

3.2.6 Concrètement : Le code les entrées les sorties

Afin de mettre NEMO dans les mêmes conditions que `Freshkiss2d` il est nécessaire de modifier le code et de le recompiler. On change les fichiers suivants : `OCE/TRA/eos.F90` (avec une nouvelle valeur de ρ_0), `MY_SRC/usrdef_nam.F90` (avec un nouvelle géométrie de la cuve), `MY_SRC/usrdef_istate.F90` (avec un nouvel état initial)

On gère les paramètres avec les fichiers : `namelist_cfg` et `file_def-oce_nemo.xml`

Compilation sur 8 noeuds sur le centre de calcul de l’IDRISS : `./makenemo -a LOCK_EXCHANGE -m X64_ADA_02 -j 8`

Création de script et lancement sur plusieurs noeuds de calculs : `llsubmit job`

Observation du run : `llq | grep romr004`

3.3 Description de l’expérience numérique

Pour comparer les deux logiciels nous nous plaçons dans le cadre d’une expérience menée par Adduce dont les résultats figurent dans [1]. Dans son papier de 2012, Adduce conduit des expériences physiques de *lock exchange* en trois dimensions en faisant varier les paramètres tels que le volume d’eau dense (salée), la hauteur et la position de la paroi séparatrice. Elle utilise une cuve de 3m de long et 20cm de large, qui peut être remplie avec une hauteur d’eau jusqu’à 30cm. Deux masses d’eau de densités différentes sont séparées par une porte qui est ouverte à l’instant initial, à gauche se trouve de l’eau salée dense et à droite de l’eau pure de densité 1000kg/m³.

Travailler sans dissipation explicite permet de voir les effets dissipatifs numériques cachés dans les schémas. On essaye donc de reproduire cette expérience, pour commen-

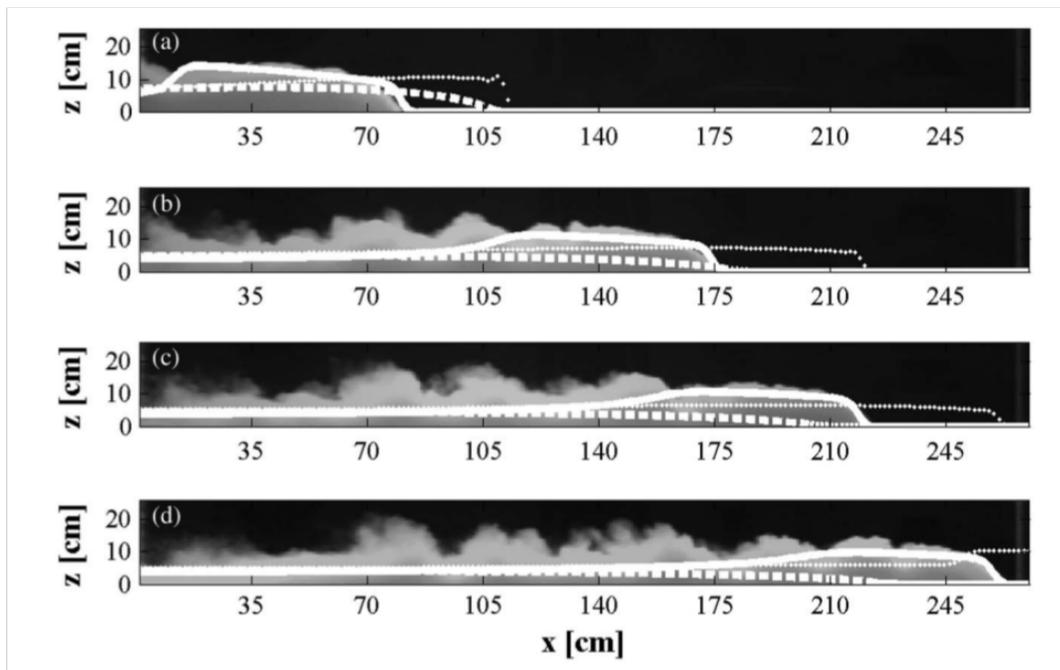


FIGURE 3: Expérience numéro 9 issue du papier de Adduce 2012

cer, dans une configuration pour laquelle les effets de la dissipation sont physiquement négligeables.

Comme Boittin 2019 [3], on considère que l'expérience numéro 9 du papier [1] permet de dire que les effets de dissipations sont "négligeables" sur le temps de l'expérience. Autrement dit ils n'affectent pas la variable qui permet de comparer les expériences : la vitesse du front.

On se restreint au cas 2D (x,z) et on considère l'expérience numéro 9. Les dimensions de la cuve sont donc de 3m de long sur l'axe x et $h = 0.3$ m de hauteur sur l'axe z . La longueur occupée par l'eau dense est identifiée par $x_0 = 0.3$ m sur l'axe x . Le volume d'eau dense très salée de concentration 120 g/L à gauche qui revient à un $\delta\rho = 90$ kg/m³ génère un fort gradient horizontal de pression ce qui permet de négliger les effets dissipatifs physiques.

Avec son modèle à deux couches, avec surface libre et un schéma différence finie doté de bonnes propriétés pour la conservation des chocs (de type MacCromack), Adduce parvient à reproduire les résultats expérimentaux. Malgré la différence relative de densité entre les deux fluides élevée (8 - 9 %), la vitesse du front $v_f = 0.24$ m/s est étonnamment

proche de la vitesse du front prédite par Benjamin 1968 $v_{Ben} = 0.246$ m/s avec $h = 0.3$ m la hauteur d'eau, $g = 9.80$ m/s² la constante de gravité, et $\rho_1 = 1090$ kg/m³ et $\rho_2 = 1000$ kg/m³ les masses volumiques des deux fluides. La figure 3 illustre l'expérience.

3.3.1 Configuration de base

Nous commençons par configurer `Freshkiss2d` et `NEMO` de manière identique avant de les comparer. La chose n'est pas évidente dans le contexte de `NEMO` car, étant donnée la diversité des configurations qu'il peut simuler, le nombre de paramètres à gérer se compte par centaines. Pour simplifier nous commencerons donc à travailler avec les schémas de la configuration développée par S. Flavoni et G. Madec pour reproduire les résultats du papier de Ilicak 2012. Les paramètres utilisés pour reproduire l'expérience 9 de Adduce 2012 sont listés dans le tableau 1.

Résumé des paramètres			
	NEMO	Freshkiss2d	description
xmax	3 m	3 m	taille horizontale du domaine
Nx	300	300	nombre de points horizontaux
Δx	0.01m	0.01m	taille du pas d'espace
zmax	1 m	1 m	taille verticale du domaine
Nz	20	20	nombre de points verticaux
Δz	0.015m	0.015m	taille du pas d'espace
CFL		0.95	pas de temps associé à CFL
Δt	4×10^{-4}	4×10^{-4}	pas de temps [sec]
order	2 FCT	2	ordre schéma espace traceur
traldf	0.	0.	diffusion horizontale traceur
trazdf	0.	0.	diffusion verticale traceur
order	3 UP3		ordre schéma espace moment
dynldf	0	0	diffusion horizontale moment
dynzdf	0.	0.	diffusion verticale moment
order	1-2 LF	2 RK	ordre schéma temps
tdf	Asselin		diffusion temporelle
η	surface libre	surface libre	condition limite en haut
bords	free slip	free slip	condition limite bas et latérales
dw	2500 ts	1"	période d'écriture
tw0	1"	0	instant de la sortie initiale

TABLE 1: Tableau décrivant les paramètres utilisés pour produire des simulations de *lock exchange* avec les logiciels `NEMO` et `Freshkiss2d`

3.4 Métriques : analyse des résultats

3.4.1 La vitesse du front

On utilise le tableau qui représente l'évolution du traceur, on sélectionne les pixels correspondant à la couche de fond, on en prend le gradient et on cherche la position du maximum.

3.4.2 Le mélange

On utilise le tableau qui représente l'évolution du traceur, on compte les pixels en 1/2 teinte correspondant à une densité entre 1000.5 kg/m³ et 1089.5 kg/m³ pour avoir une représentation du nombre de pixels mélangés.

3.4.3 L'énergie

On ne calcule pas directement l'énergie totale du système, on prend simplement des grandeurs qui varient linéairement pour avoir une idée de l'évolution des grandeurs énergétiques, ainsi l'énergie cinétique sera représentée par $\hat{E}_c = \sum_{i,k} u_{i,k}^2$, l'énergie potentielle par $\hat{E}_p = \sum_{i,k} \rho_{i,k} \times h_{i,k}$ et l'énergie associée au traceur par $\hat{E}_t = \sum_{i,k} \rho_{i,k}^2$.

4 Étude des résultats de NEMO et Freshkiss2d

4.1 Étude de la convergence

La première question à se poser est celle de la convergence, en effet il est intéressant de voir si `Freshkiss2d` et `NEMO` convergent dans la configuration étudiée. En l'absence de convergence, étant donné l'irrégularité de la condition initiale, il est possible que les logiciels ne résolvent pas le problème posé.

On fait donc varier les pas d'espace horizontaux, identifiés en bleu dans le tableau, et verticaux, identifiés en rouge dans le tableau. On notera que le changement du pas d'espace engendre également une variation de pas de temps en fonction de la CFL.

Le papier de Boittin 2019 exhibe une étude de convergence réalisée à partir de cette expérience en trois dimensions, on s'appuiera donc sur les chiffres du papier pour définir notre échantillonnage en 2 dimensions.

Nombre d'éléments			
	Nx x Ny (Boittin 3D)	Nx (2D)	Nz
1	1396	144	9
2	2570	196	12
3	5352	280	18
4	10082	390	24
5	15464	482	30

4.1.1 Freshkiss2d

De même que dans le papier de boittin 2019 dont la figure est présentée à gauche dans la figure 5, on regarde l'évolution de la vitesse du front de `Freshkiss2d`.

Comme dans le papier Boittin 2019, on observe l'évolution de la position du front au cours du temps pour différentes résolutions. La figure 5 (b) montre la difficulté de travailler à convergence pour `Freshkiss2d` dans une telle configuration.

Même si la courbe qui évalue la position du front semble évoluer de moins en moins quand le nombre d'échantillon augmente, elle ne se fige pas vraiment. De plus, elle semble aller au delà de la vitesse observée dans l'expérience physique comme dans la figure 5 (a) du papier de Boittin 2019. Le graphe de la figure 5 (a) commence à l'instant $t_a = 1$ s : à $t_a = 4$ s le front est à environ 1 m, ce qui correspond bien à l'instant $t_b = 3$ secondes ; même chose à la fin de l'expérience : la figure 5 (a) montre que $obs(t_a = 9) = B(t_b = 8) = 2.3$ m.

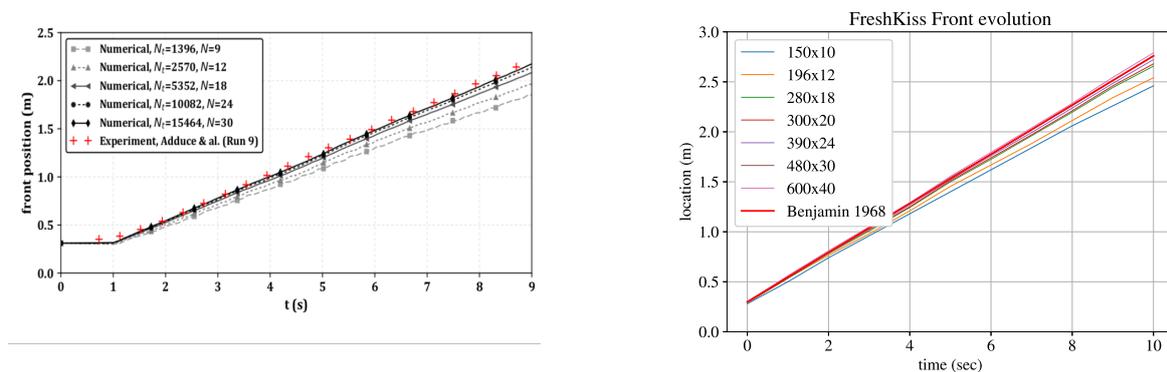


FIGURE 4: Étude de convergence (a) à gauche la figure du papier de Boittin 2019 (b) à droite la figure issue de `Freshkiss2d` avec des résolutions semblables

4.1.2 NEMO

On se place dans les mêmes conditions pour réaliser l'étude de convergence pour `NEMO`. Dans le fichier de paramètres `NEMO` on spécifie un pas d'espace $\Delta x = \frac{3}{N_x}$ au lieu du nombre d'échantillons N_x . On spécifie également un pas d'écriture déterminé en nombre d'échantillons et non en secondes $\Delta_w t = \frac{1}{\Delta t}$.

Nombre d'éléments					
	3D couches	Δx	Δz	Δt	$\Delta_w x$
1	1396	0.0208	0.033	$7.50e-4$	1333
2	2570	0.0153	0.025	$5.35e-4$	1869
3	5352	0.0107	0.016	$4.00e-4$	2500
4	10082	0.0077	0.0125	$2.80e-4$	3571
5	15464	0.0062	0.01	$2.30e-4$	4347

Le premier fichier `NEMO` est celui associé au premier pas de temps stocké c'est à dire dans notre cas le fichier à 1 s alors que le 1er fichier `Freshkiss2d` est celui associé à l'état initial, c'est à dire le fichier à 0 s. A certaines résolutions temporelles conditionnées par les résolutions spatiales, `NEMO` ne sort pas le fichier attendu car le rapport entre la fréquence d'échantillonnage et la fréquence d'écriture n'est pas un entier. Comme mon pas de temps de sortie est de 1 s, les deux premiers fichiers sont identiques, ce qui explique l'erreur initiale entre `NEMO` et `Freshkiss2d` dans certains cas.

La figure 5 montre une assez bonne convergence pour `NEMO` : les données sont plus ramassées. Par contre l'ordre des courbes n'est pas forcément cohérent avec la résolution : on s'attend à ce que plus la résolution est grande, plus la vitesse du front est élevée or la

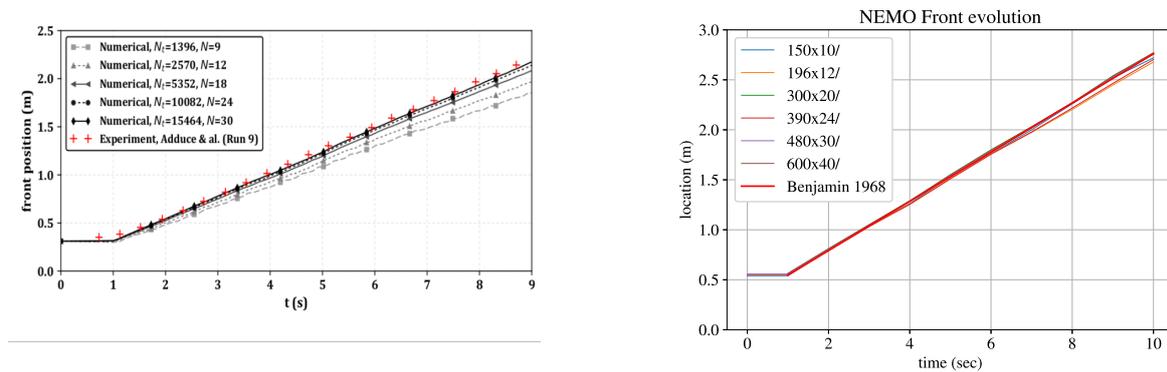


FIGURE 5: Étude de convergence (a) à gauche la figure du papier de Boittin 2019 (b) à droite la figure issue de NEMO avec des résolutions semblables

courbe associée à la résolution 300x20 est plus haute que toutes les autres et dépasse par endroit la limite attendue.

4.1.3 Bilan

Dans les deux cas on a du mal à obtenir des résultats de convergence. Il faudrait augmenter le nombre d'échantillons et donc ralentir de manière significative les temps de calcul.

La vitesse du front dans l'expérience de Adduce est très proche de la vitesse du front théorique calculée par Benjamin (1968) mais ne correspond pas à la vitesse maximale observée dans nos simulations, ce qui soulève plusieurs questions :

1. est ce un hasard si les vitesses expérimentales et théoriques sont proches ?
2. la dissipation d'énergie est elle vraiment négligeable dans l'expérience ?
3. le cadre théorique de Benjamin (1968) et Shin (2004) s'applique t-il à cette expérience ?
4. l'outil qui mesure la position du front est-il fiable ?
5. la vitesse du front est - elle pertinente pour apprécier la convergence ?

4.2 Inter-comparaison : problème modèle

Les configurations des deux logiciels NEMO et Freshkiss2d sont détaillées dans le tableau 1. Pour des raisons pratiques on se limite à 300x20 pour la résolution horizontale et verticale. Le choix sur le pas de temps dans NEMO s'est fait par défaut comme dans Freshkiss2d étant donné la complexité de NEMO l'étude de la CFL pour les différents

schémas utilisés n'a pas été réalisée. Le papier de Lemarié 2015 [4] renseigne sur la CFL de NEMO . Il n'y a pas de viscosité ni de diffusion explicite dans cette première étude.

Cette configuration est un peu limitée au regard de l'étude de convergence mais dans un premier temps les simulations ont été réalisées avec une machine peu performante.

4.2.1 Évolution de l'interface

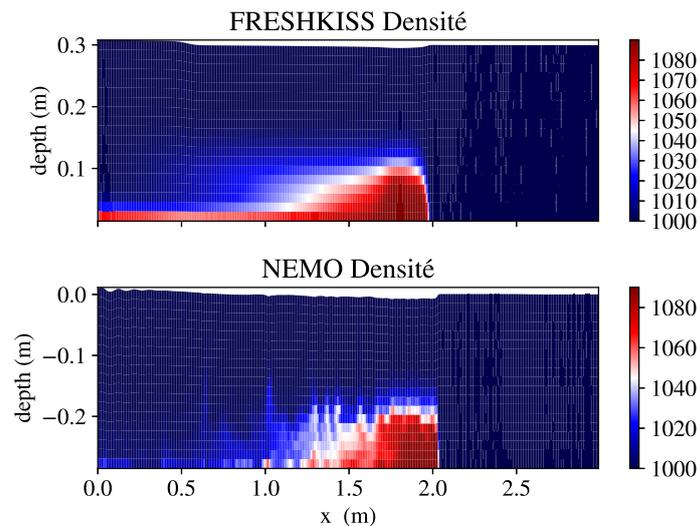


FIGURE 6: Forme du front à 7 secondes

La figure 6 montre comment NEMO et Freshkiss2d font évoluer l'état initial de l'expérience Adduce 9 à différents instants. On voit clairement que Freshkiss2d privilégie une cohérence horizontale par rapport à NEMO . Les interfaces entre la couche de fluide dense et la couche de fluide moins dense présentent des différences notables. Dans la simulation NEMO on voit apparaître des oscillations tout le long de l'interface.

4.2.2 Le champ de vitesse

La figure 7 montre les cartes des vitesses horizontales (a) et verticales (b). Les vitesses horizontales présentent une bonne cohérence en termes de valeurs. On voit bien les instabilités dans NEMO alors que la vitesse est lissée dans Freshkiss2d . On observe un saut de vitesse dans la simulation NEMO ce qui donne une vitesse verticale très abrupte et concentrée dont les valeurs sont 3 fois plus élevées que dans Freshkiss2d . Une interprétation possible des différences observées est dans la viscosité numérique liée aux schémas. En effet, plus la viscosité est importante, plus les champs de traceurs et de vitesses sont

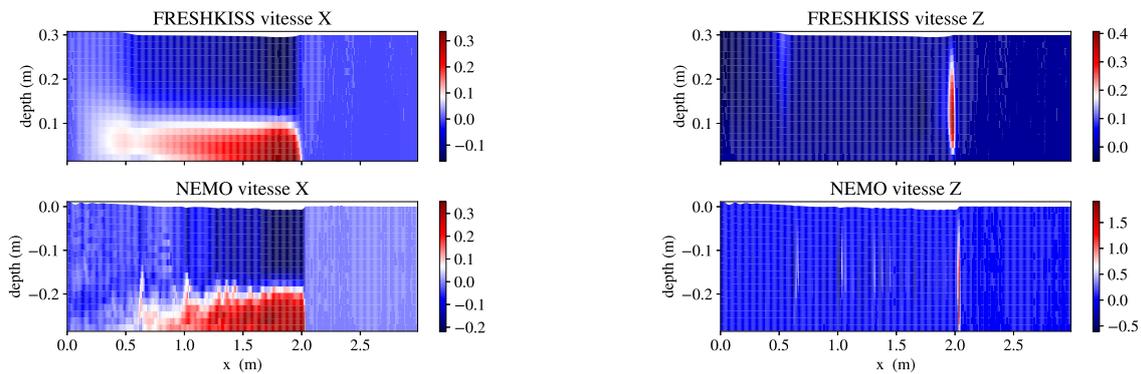


FIGURE 7: Cartes de vitesses - comparaison entre les simulations à 7 sec : (a) à gauche les vitesses horizontales (a) à gauche les vitesses horizontales (b) à droite les vitesses verticales

lisses. Le schéma d'advection implémenté dans `Freshkiss2d` pourrait être sujet à plus de viscosité numérique que celui de `NEMO`.

4.2.3 Evolution de la position du front et du mélange

La figure 8 montre l'évolution de la position du front et du mélange entre 0. Les

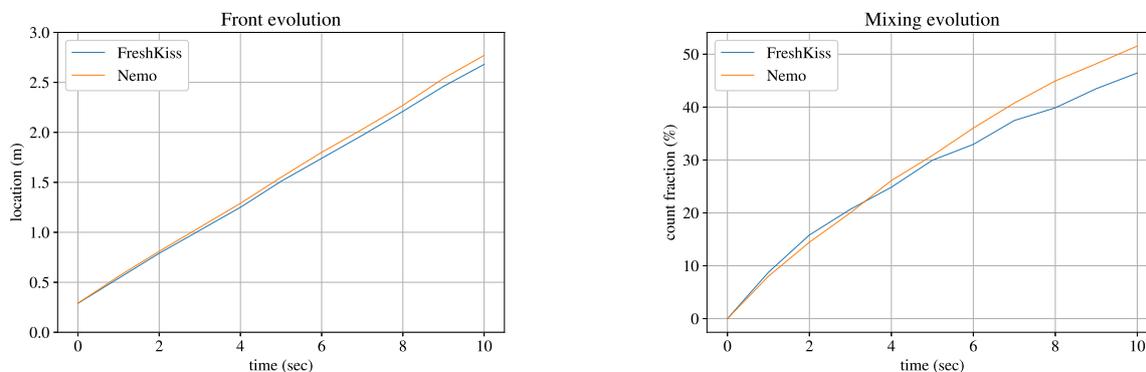


FIGURE 8: Evolution entre 0 et 10 secondes (a) à gauche de la position du front (b) à droite du mélange

évolutions du front dans `Freshkiss2d` et `NEMO` sont comparables : on retrouve à peu près les mêmes vitesses de front (Fig. 8, a). Toutefois, `Freshkiss2d` est légèrement plus lent que `NEMO`. L'évolution du front est linéaire, et compatible avec les observations expérimentales de l'expérience 9 de l'article Adduce (2012) [1]. Pour ce qui est du mélange (Fig. 8, b), malgré une interface entre les deux fluides beaucoup plus accidentée dans `NEMO` comparé à `Freshkiss2d`, on observe des résultats similaires entre `NEMO` et `Freshkiss2d` jusqu'à 5 s, ensuite le mélange est plus fort dans `NEMO`. L'adéquation entre la vitesse

du front (seule métrique) de l'expérience 9 dans le papier de Adduce (2012) et la vitesse théorique déduite d'une idéalisation de l'expérience pose question. Les résultats sont-ils compatibles à cause de la possibilité de négliger la dissipation devant le gradient de pression dans l'expérience ?

Vitesses du front (m/s) 300 x 20			
NEMO	Freshkiss2d	Théorie	Mesure
0.25	0.254	0.246	0.24

TABLE 2: Vitesses observées et vitesse théorique

4.2.4 Evolution de l'énergie cinétique et potentielle

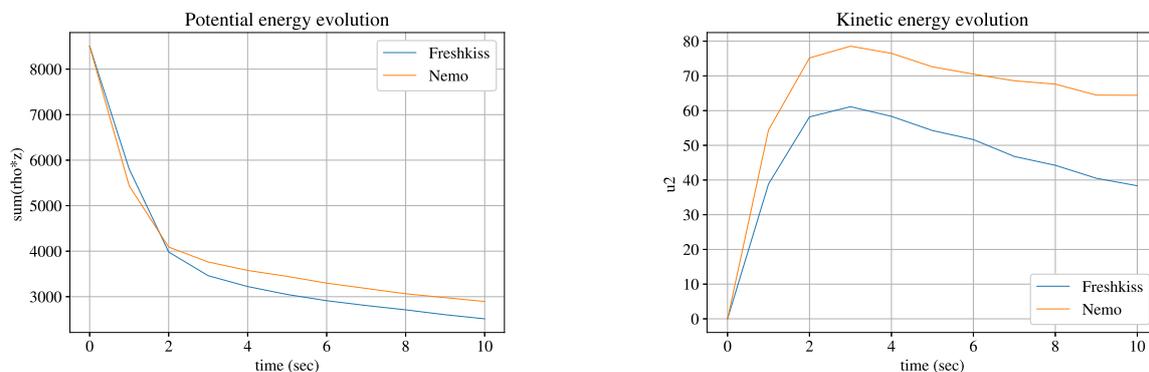


FIGURE 9: Evolution entre 0 et 10 secondes (a) à gauche de l'énergie potentielle t (b) à droite de l'énergie cinétique

On observe bien dans la figure 9 une forte décroissance de l'énergie potentielle qui correspond à une augmentation de l'énergie cinétique entre 0 et 3 s. Au delà, les deux types d'énergie décroissent doucement. Globalement, on observe moins d'énergie dans Freshkiss2d que dans NEMO .

4.2.5 Bilan de l'intercomparaison

On rappelle que l'on cherche à résoudre les équations de Navier Stokes sans terme de dissipation. L'idée sous-jacente est d'évaluer l'erreur des schémas. A priori cette erreur correspond à une dissipation. Si la dissipation a tendance à lisser, elle devrait également être synonyme de moins d'énergie totale.

On voit clairement que la dissipation d'énergie potentielle et cinétique est plus importante dans Freshkiss2d que dans NEMO dans la figure 9.

Le mélange correspond à une énergie potentielle, plus il y a de mélange plus il y a d'énergie potentielle. Les figures 8 et 9 montrent plus ou moins bien que l'apparition d'un mélange supérieur à 20% va avec une réduction de la pente de l'énergie potentielle. Le fait que le mélange et l'énergie potentielle soient plus faibles dans les données `Freshkiss2d` est compatible avec l'idée que l'interface entre les deux fluides soit plus lisse.

On constate ensuite que la vitesse du front n'est pas sensible à l'évolution de l'énergie cinétique ni à celle de l'énergie potentielle : en effet 1) la diminution de l'énergie (cinétique et potentielle) n'engendre pas un ralentissement de l'évolution du front, 2) les différences d'énergie observées entre `NEMO` et `Freshkiss2d` n'ont pas un effet très important sur la vitesse du front.

Les différences d'interface entre `NEMO` et `Freshkiss2d` peuvent s'expliquer à la lumière de [6] par une différence de dissipation dans les schémas d'advection. Le caractère lisse du front de `Freshkiss2d` pourrait être du à une forme de viscosité numérique plus importante que celle de `NEMO` .

On prêtera attention au fait que `NEMO` et `Freshkiss2d` ont tourné sans viscosité la solution qu'ils fournissent n'a pas forcément de raison d'être physique.

La simulation de l'expérience numéro 9 du papier de Adduce avec `NEMO` et `Freshkiss2d` montre :

- une compatibilité entre `NEMO` et `Freshkiss2d` avec les données expérimentales pour ce qui est de la vitesse du front bien que cette vitesse ne soit pas très sensible ; ces observations confirment que l'effet de la dissipation est négligeable devant le gradient de pression dans cette configuration ;
- des disparités entre `NEMO` et `Freshkiss2d` en ce qui concerne la géométrie du front et de la surface libre : l'interface `NEMO` est très accidentée et le fluide ne laisse pas de trainée alors que celle de `Freshkiss2d` est compatible avec les observations ;
- que `NEMO` conserve plus d'énergie que `Freshkiss2d` ; on suppose que la non-dissipation dans `NEMO` explique le caractère accidenté de l'interface entre les fluides denses et légers ; elle peut être régularisé sous l'effet de l'addition de viscosité qui en lissant l'interface de `NEMO` permettrait peut-être de reproduire l'interface `Freshkiss2d`

4.3 Sensibilité à la viscosité

On regarde l'effet de la viscosité sur les fronts de `NEMO` et `Freshkiss2d` . Le fichier de paramètre `Freshkiss2d` ne permet pas de différencier la viscosité horizontale de la

viscosité verticale contrairement à NEMO qui utilise un terme de viscosité explicite propre à chaque direction pour représenter une dissipation d'énergie. La manière de représenter les deux types de viscosité n'est pas la même dans NEMO . On regardera donc l'effet de la viscosité horizontale et verticale pour les deux logiciels et on séparera ensuite la viscosité verticale de la viscosité horizontale pour NEMO uniquement. La viscosité cinématique de l'eau est de $1 \times 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$ environ (elle dépend principalement de la température du fluide), mais les simulations avec une telle viscosité donnent des résultats identiques aux simulations sans viscosité. On utilise des coefficients de viscosité verticale et horizontale suivantes : 0 , 10^{-6} , 10^{-4} , et $10^{-2} \text{ m}^2 / \text{s}$; ces valeurs permettent de montrer l'effet de la viscosité sur l'évolution du front et de l'interface entre les deux fluides.

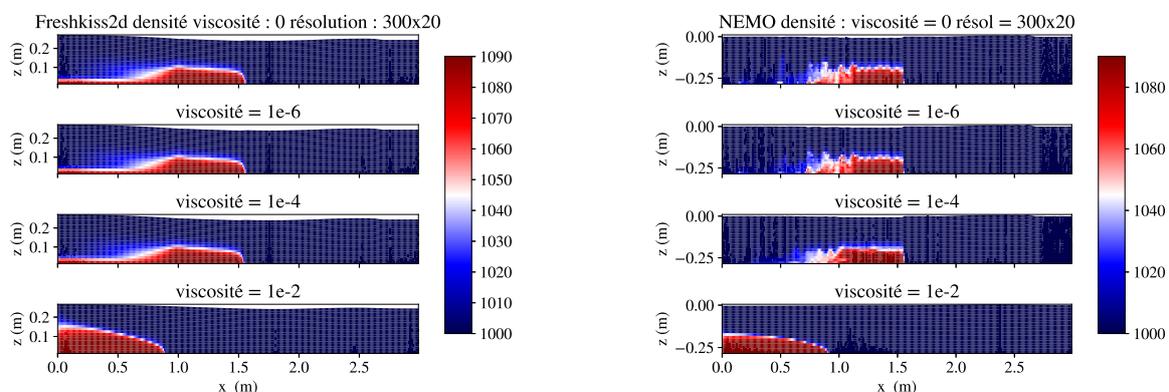


FIGURE 10: Observation de l'interface à 5 secondes pour différentes viscosités horizontales et verticale (a) à gauche Freshkiss2d (b) à droite NEMO

La figure 10 montre que l'interface est régularisée en présence de viscosité, elle est même ralentie lorsque la viscosité est de 10^{-2} . La viscosité explicite générant une dissipation d'énergie, il est logique d'observer un front plus lent. L'effet de la viscosité lorsque celle-ci est inférieure ou égale à 10^{-4} est quasiment invisible pour Freshkiss2d dans NEMO ; on voit néanmoins une petite régularisation de l'interface.

On observe peu de différences sur la vitesse du front entre NEMO et Freshkiss2d pour des coefficients de viscosité identiques sur la verticale et sur l'horizontale dans la figure 11. On voit que les vitesses du front sont tout à fait cohérentes entre NEMO et Freshkiss2d quelle que soit la viscosité.

La figure 12 montre que plus la viscosité est grande, plus le mélange diminue et cette observation est compatible avec les résultats du papier [6]. Lorsque le coefficient de viscosité est de l'ordre de $10^{-4} \text{ m}^2 / \text{s}$, la figure 12 montre que le mélange change peu dans les données Freshkiss2d contrairement aux données NEMO . On peut donc maintenir l'hypothèse que les schémas Freshkiss2d sont plus visqueux que ceux de NEMO .

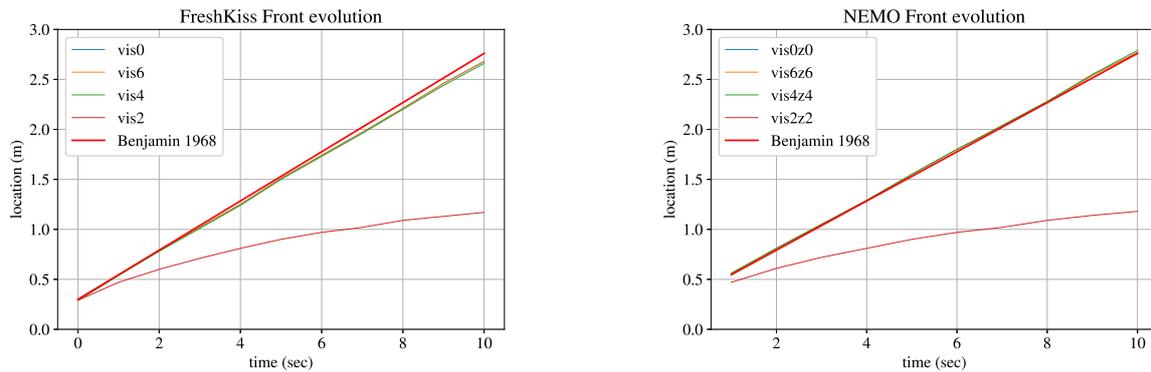


FIGURE 11: Evolution du front à entre 0 et 10 secondes pour différentes viscosités horizontales et verticale (a) à gauche Freshkiss2d (b) à droite NEMO

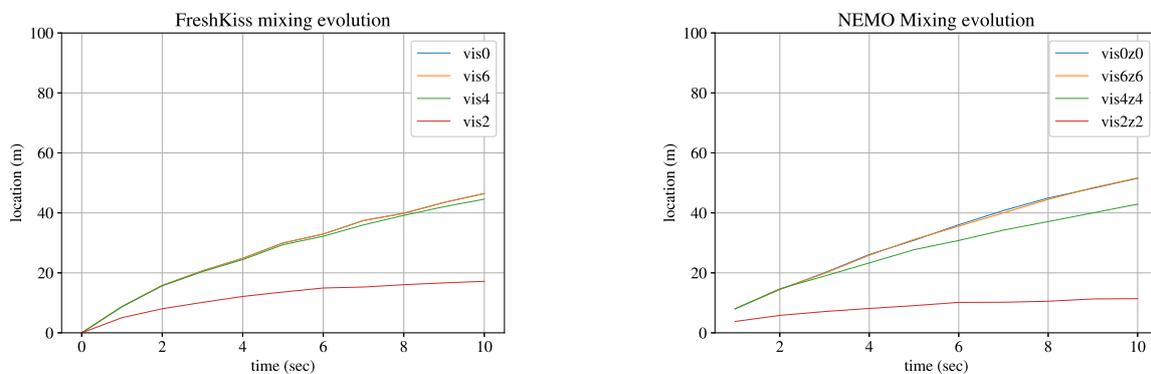


FIGURE 12: Evolution du mélange à entre 0 et 10 secondes pour différentes viscosités horizontales et verticale (a) à droite Freshkiss2d (b) à gauche NEMO

La figure 13 montre l'effet de la viscosité sur l'énergie cinétique : on voit bien qu'elle diminue avec la viscosité. Il serait intéressant de produire plus de simulations pour tracer l'énergie cinétique en fonction de la viscosité.

La figure 14 montre l'effet de la viscosité sur l'énergie potentielle : pour *Freshkiss2d* on voit qu'elle a tendance à augmenter avec la viscosité, tandis que pour *NEMO* ce n'est pas clair. Il serait également intéressant de produire plus de simulations pour tracer l'énergie potentielle en fonction de la viscosité.

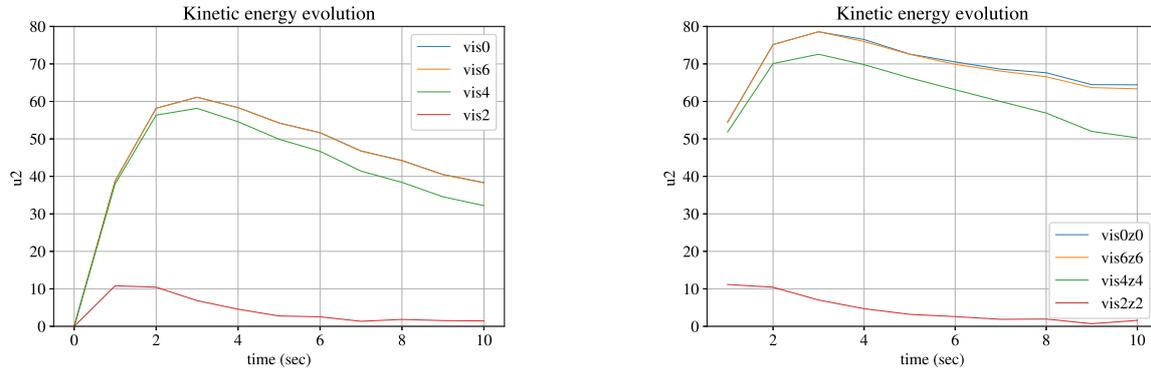


FIGURE 13: Effet de la viscosité sur l'énergie cinétique pour différentes valeurs du coefficient de viscosité à résolution donnée 300x20 : (a) à gauche Freshkiss2d (b) à droite NEMO

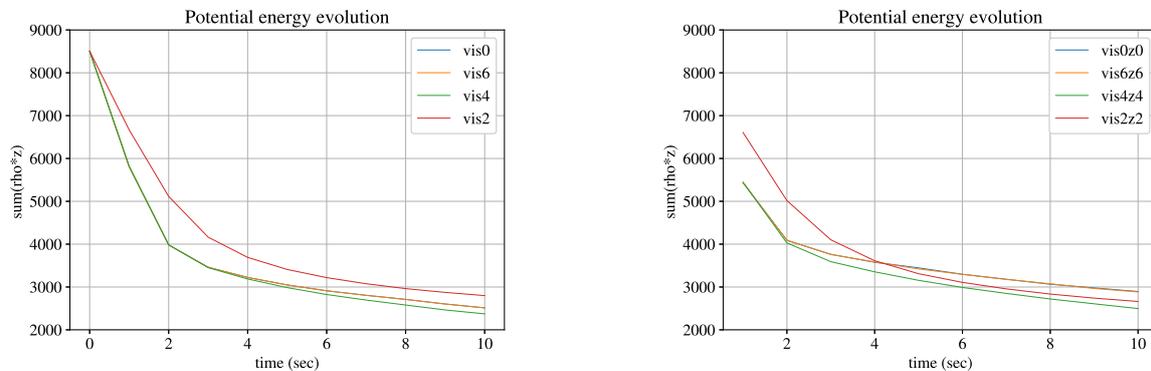


FIGURE 14: Effet de la viscosité sur l'énergie potentielle pour différentes valeurs du coefficient de viscosité à résolution donnée 300x20 : (a) à gauche Freshkiss2d (b) à droite NEMO

4.3.1 Effet de la viscosité purement latérale sur les simulations NEMO

A priori le mouvement des fluides engendre un cisaillement latéral assez faible : les fluides glissent horizontalement l'un sur l'autre donc la direction principale du cisaillement est la direction verticale. La vitesse du front est globalement la même dans les quatre simulations de la figure 15 : tous les fronts sont au même endroit au même moment. La régularité des interfaces est très affectée lorsque le coefficient de viscosité latérale est suffisamment grand. Pour des viscosités latérales grandes, l'interface NEMO est compatible avec l'interface Freshkiss2d et les observations.

Comme le confirme la figure 16 (b), pour différentes viscosités latérales dans NEMO, la vitesse du front reste relativement similaire et compatible avec la vitesse du front théorique établie dans Benjamin (1968). On remarque une petite accélération pour le front à viscosité 10^{-2} , potentiellement liée à la méthode de mesure et à l'élargissement

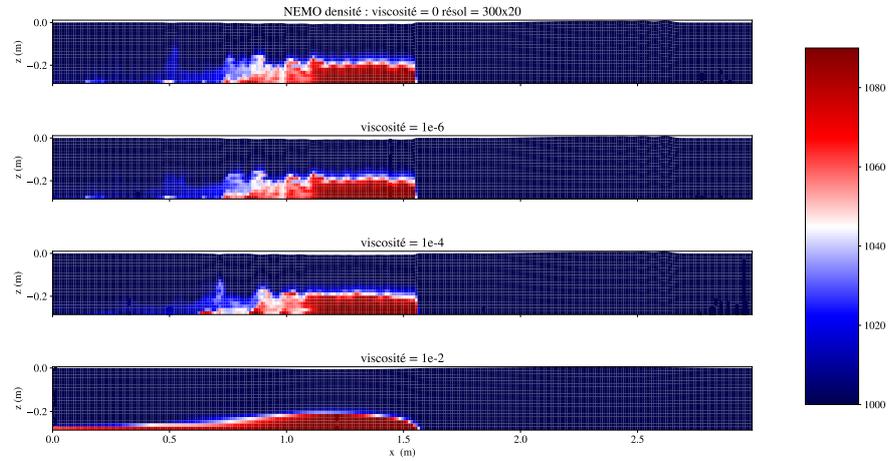


FIGURE 15: Carte de densité à l'instant $t = 5$ secondes pour plusieurs valeurs de la viscosité latérale (ahm)

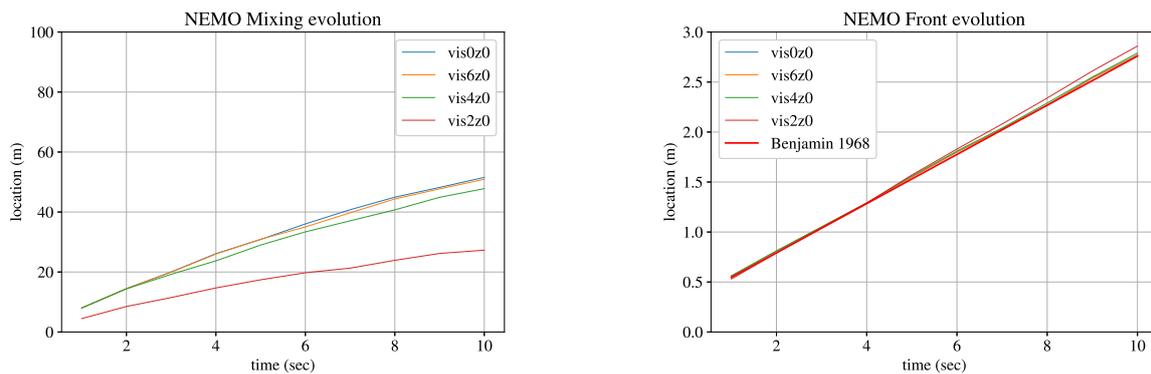


FIGURE 16: Effet de la viscosité latérale pour différente valeur du coefficient de viscosité latérale à résolution donnée 300x20 : (a) à gauche le mélange (b) à droite la position du front

du front en présence de viscosité. De plus, la figure 16 (a) montre comment la viscosité lisse le front et diminue le mélange. La réduction du mélange ne correspond-elle pas à la légère accélération du front ?

4.3.2 Effet de la viscosité purement verticale (avm0) sur les simulations NEMO

Le mouvement horizontal des fluides engendre un cisaillement important. L'effet de la viscosité verticale devrait être plus importante. C'est clairement ce qu'on observe pour le coefficient de viscosité de 10^{-2} : on voit bien un ralentissement du front et un mélange plus faible.

On retrouve le comportement lissé dans la figure 18 (a) qui augmente avec la viscosité,

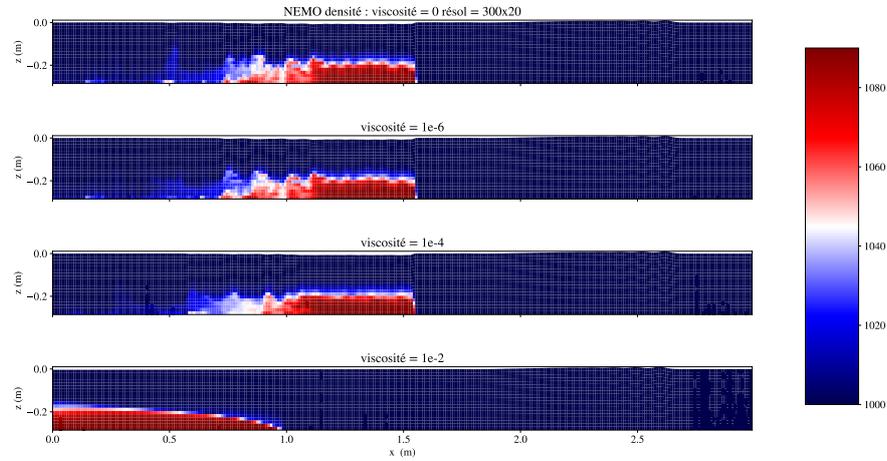


FIGURE 17: Carte de densité à l'instant $t = 5$ secondes pour plusieurs valeurs de la viscosité verticale

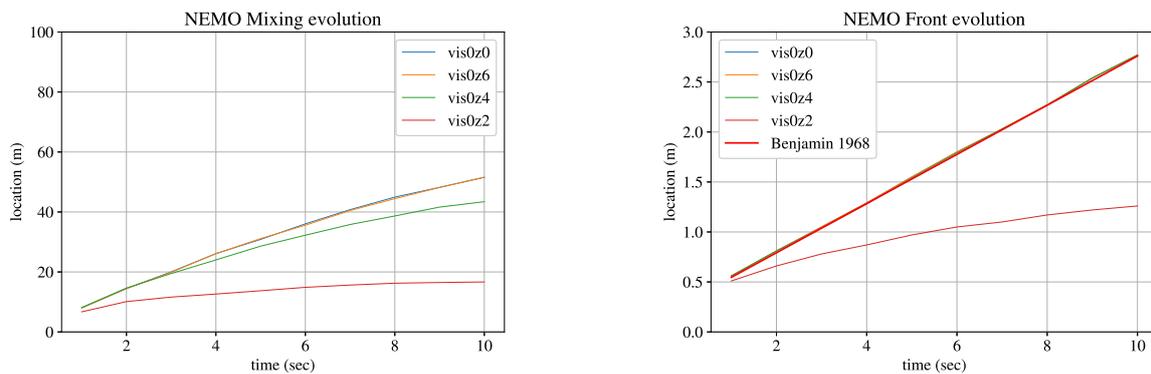


FIGURE 18: Effet de la viscosité verticale pour différentes valeurs du coefficient de viscosité verticale à résolution donnée 300x20 : (a) à gauche le mélange (b) à droite la position du front

et qui engendre un niveau de mélange moins important. La figure 18 (b) montre que pour différentes viscosités verticales allant de 10^{-2} à 10^{-4} m^2/s dans NEMO la vitesse du front reste relativement similaire et compatible avec la vitesse du front théorique établie dans Benjamin 68. Ceci semble montrer que la viscosité associée au schéma d'advection est inférieure à 10^{-4} m^2/s . En revanche, lorsque le coefficient est suffisamment grand (supérieur ou égal à 10^{-2} m^2/s par exemple) on voit clairement un ralentissement de la vitesse du front par rapport à la théorie.

4.3.3 Bilan

Augmenter la viscosité revient normalement à augmenter la dissipation. La dissipation a tendance à lisser les solutions et à consommer l'énergie totale du système. On observe

bien cet effet de lissage de l'interface dans les simulations issues de `NEMO` , en revanche la consommation d'énergie pose question surtout pour la viscosité latérale puisque la vitesse du front ne décroît pas. En regardant l'évolution des grandeurs énergétiques on voit bien apparaître cette consommation d'énergie que ce soit pour l'énergie potentielle, qui est de toute manière transformée en énergie cinétique, ou pour l'énergie cinétique à partir d'un certain moment. On a l'impression que plus la viscosité (10^{-4} et 10^{-6} m²/s) est importante, plus l'énergie cinétique décroît vite.

Le mélange numérique, induit par la trop faible viscosité ou par les instabilités non résolues, n'impacte en rien la vitesse du front, comme on pourrait s'y attendre. Il ne semble pas clairement correspondre à une conversion d'énergie cinétique en énergie potentielle car, en présence d'une grande viscosité latérale, la vitesse du front ne décroît pas bien que le mélange diminue drastiquement. La viscosité verticale, en revanche, a un impacte important sur le mélange mais aussi sur la vitesse du front.

On voit, comme le présente Shin (2004), que la vitesse du front n'est pas une mesure sensible à la dissipation l'énergie. Elle n'est affectée que lorsque la dissipation est très forte comme on peut le voir dans les expériences de l'article de Adduce (2012).

Il semblerait que dans cette configuration, la sensibilité de `NEMO` à la viscosité explicite soit légèrement inférieure à 10^{-4} , pour `Freshkiss2d` elle est supérieure. Peut-on parler de la viscosité implicite des schémas ici? Ce qui pourrait aller dans le bon sens pour en conclure que le schéma numérique de `Freshkiss2d` est plus "visqueux" que celui de `NEMO`

5 Conclusion et perspectives

Le cas test du *lock exchange* est une configuration particulière qui met en oeuvre une discontinuité et un régime de vitesse inférieur à la vitesse des ondes de gravité. Ce n'est un régime confortable ni pour l'un ni pour l'autre des deux logiciels.

En l'absence de termes de dissipation d'énergie, on constate la difficulté de travailler à convergence, le fait qu'aucun des logiciels n'explorent, ainsi qu'un front de NEMO très abrupt. Par ailleurs, **Freshkiss2d** propose une bonne reproduction des observations expérimentales (vitesse et forme du front) tandis que NEMO ne donne pas une forme de front en adéquation avec ces observations. On observe également que NEMO est moins dissipatif i.e. moins visqueux que **Freshkiss2d**. L'étude de sensibilité montre la régularisation de la solution avec la viscosité explicite. NEMO est plus sensible que **Freshkiss2d** à cette viscosité. Des études de sensibilité plus complètes permettraient d'affiner ces résultats. Ces observations sont en accord avec les attentes des deux logiciels. Enfin, la vitesse du front n'est pas un critère suffisamment fin pour analyser les différences entre nos deux logiciels.

Ce stage m'a permis de franchir une nouvelle étape dans cette formation, j'en retire un savoir sur des problématiques concrètes, sur la nature et la quantification de grandeurs caractéristiques du système, et sur les risques de l'interprétation. Enfin, je sors de cette expérience avec des idées d'études pour une meilleure compréhension des phénomènes numériques qui entrent en jeu dans cette configuration. Par exemple, un approfondissement théorique sur les schémas numériques et les méthodes utilisées, la comparaison de NEMO et **Freshkiss2d** dans une configuration plus dissipative comme l'expérience 10, l'influence du paramètre d'Asselin pour NEMO, l'influence des schémas sur la convergence dans NEMO, l'utilisation de la paramétrisation de la turbulence dans NEMO la transposition du cas test à des échelles plus grandes.

Références

- [1] D. Aduce. Gravity currents produced by lock exchanges : Experiments and simulations with a two-layer shallow-water model with entrainment. 2012.
- [2] T. Benjamin. Gravity currents and related phenomena. 1968.
- [3] Bouchut F. Bristeau M.-O. Mangeney A. Sainte-Marie J. Souille F. Boittin, L. The navier-stokes system with temperature and salinity for free surface flows. 2019.
- [4] G. Madec J. Demange J.M. Molines M. Honnorat F. Lemarié, L. Debreu. Stability constraints for oceanic numerical models : implications for the formulation of time and space discretizations. 2015.
- [5] Madec G. Nemo ocean engine v3.6. 2016.
- [6] Adcroft A.J. Griffies S.M. Hallberg R.M. Ilicak, M. Spurious dianeutral mixing and the role of momentum closure. 2012.
- [7] Dalziel S.B. Linden P.F. Shin, J.O. Gravity currents produced by lock exchange. 2004.